IMO 2008-1

Opgave. Zij gegeven een scherphoekige driehoek ABC met hoogtepunt H. De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde BC snijdt de lijn (rechte) BC in A_1 en A_2 De cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde CA snijdt de lijn CA in B_1 en B_2 en de cirkel door H met middelpunt het midden van de zijde AB snijdt de lijn AB in C_1 en C_2. Bewijs dat A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2 op één cirkel liggen.

Uitwerking. Met coördinaten. Het midden van AB noem ik M, de oorsprong O en in plaats van C_1 schrijf ik P. De coördinaten geef ik aan met kleine letters. Ik bewijs dat de afstand PO niet verandert als je A, B en C verwisselt.

Leg de punten A, B en C zó in een assenstelsel, dat $|a| = |b| = |c| = r$. Dan is $h = a + b + c$. Omdat p en h op dezelfde cirkel om m liggen, is $|p - m| = |h - m|$. Omdat $|a| = |b|$ ligt de oorsprong op de middelloodlijn van AB, dus is $\angle PMO = \angle AMO = 90°$. Dan volgt uit de stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned}
|p|^2 =& |p-m|^2 + |m|^2 \\
=& |h-m|^2 + |m|^2 \\
=& |a+b+c-\tfrac{a+b}{2}|^2 + |\tfrac{a+b}{2}|^2 \\
4|p|^2 =& |a+b+2c|^2 + |a+b|^2 \\
=& (a_x+b_x+2c_x)^2 + (a_y+b_y+2c_y)^2 + (a_x+b_x)^2 + (a_y+b_y)^2 \\
=& a_x^2 + b_x^2 + 4c_x^2 + 2a_xb_x + 4b_xc_x + 4c_xa_x + \\
& a_y^2 + b_y^2 + 4c_y^2 + 2a_yb_y + 4b_yc_y + 4c_ya_y + \\
& a_x^2 + b_x^2 + 2a_xb_x + a_y^2 + b_y^2 + 2a_yb_y \\
=& 2(a_x^2+a_y^2) + 2(b_x^2+b_y^2) + 4(c_x^2+c_y^2) + \\
& 4(a_xb_x + b_xc_x + c_xa_x) + 4(a_yb_y + b_yc_y + c_ya_y) \\
=& 8r + 4(a_xb_x + b_xc_x + c_xa_x) + 4(a_yb_y + b_yc_y + c_ya_y)
\end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking is symmetrisch in a, b en c en verandert dus niet als je A, B en C van plek verwisselt. De zes mogelijke plaatsen voor P (namelijk A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 en C_2) hebben daarom dezelfde afstand tot de oorsprong, en liggen dus op één cirkel. $\square$