

# PROFIELWERKSTUK

---

## **i**

---

Alexander van Hoorn, 6E

4 DECEMBER 2007

Begeleiders:

A. van den Brandhof (Wiskunde)  
F. Eerkens (Natuurkunde)

# Inhoudsopgave

|          |                                                |           |
|----------|------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Inleiding</b>                               | <b>2</b>  |
| <b>2</b> | <b>Meetkunde</b>                               | <b>3</b>  |
| 2.1      | De stelling van Napoleon . . . . .             | 4         |
| <b>3</b> | <b>Schrödingervergelijking</b>                 | <b>6</b>  |
| 3.1      | Klassieke golfvergelijking . . . . .           | 6         |
| 3.2      | Kwantummechanica . . . . .                     | 6         |
| <b>4</b> | <b>Wisselstroom</b>                            | <b>8</b>  |
| 4.1      | Onderzoek . . . . .                            | 8         |
| <b>5</b> | <b>Zètafunctie</b>                             | <b>10</b> |
| 5.1      | De faculteitsfunctie . . . . .                 | 10        |
| 5.2      | Integraalformule voor de zètafunctie . . . . . | 11        |
| 5.3      | Contourintegraal . . . . .                     | 12        |
| 5.4      | Functionaalvergelijking . . . . .              | 13        |
| 5.5      | Toepassing . . . . .                           | 15        |
| <b>6</b> | <b>Conclusie</b>                               | <b>16</b> |
| <b>7</b> | <b>Bronnen</b>                                 | <b>17</b> |
| <b>8</b> | <b>Bijlage:gebruikte stellingen</b>            | <b>18</b> |
| 8.1      | Formule van Euler . . . . .                    | 18        |
| 8.2      | Parametrisch differentiëren . . . . .          | 18        |
| 8.3      | Substitutieregel . . . . .                     | 19        |
| 8.4      | Stelling van Cauchy . . . . .                  | 19        |

# 1 Inleiding

Complexe getallen zijn een uitbreiding op de verzameling reële getallen. Ze bestaan uit een reëel deel en een imaginair deel en zijn van de vorm  $x + yi$ , waar  $x, y \in \mathbb{R}$  en  $i \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{-1}$ . In dit profielwerkstuk bespreek ik een aantal toepassingen van complexe getallen. Wortels trekken uit negatieve getallen klinkt onzinnig, maar complexe getallen kunnen sommige wiskundige berekeningen vergemakkelijken.

De hoofdvraag van dit werkstuk is: “Hoe kunnen complexe getallen worden toegepast?”. Ik behandel vier compleet verschillende gebieden in de wis- en natuurkunde waarin complexe getallen nuttig zijn: vlakke meetkunde, de Schrödingervergelijking, wisselstroom en tot slot de Riemann zètafunctie.

Voor elk gebied formuleer ik een deelvraag, waar ik aan het eind van dit werkstuk bij de beantwoording van de hoofdvraag op terugkom. De deelvragen zijn:

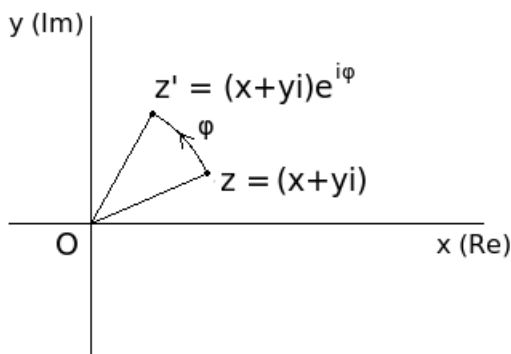
- Waarom zijn complexe getallen handig voor het bewijzen van stellingen in de meetkunde?
- Hoe kun je complexe getallen gebruiken om de Schrödingervergelijking af te leiden?
- Hoe gebruik je complexe getallen bij het rekenen met wisselstroom?
- Wat is de Riemann zètafunctie en wat kun je ermee?

Het antwoord op deze deelvragen is de inhoud van dit werkstuk.

## 2 Meetkunde

In de vlakke meetkunde kunnen complexe getallen worden gebruikt om de hoekpunten van figuren aan te geven. De horizontale coördinaat van een punt is het reële deel van het complexe getal, en de verticale coördinaat het imaginaire deel.

Een punt aan de andere kant van de oorsprong plaatsen is heel intuïtief gelijk aan het vermenigvuldigen van zijn coördinaten met  $-1$ . Voor een rotatie van  $180^\circ$  of  $\pi$  radialen om de oorsprong wordt het complexe getal dus met  $-1$  vermenigvuldigd. Een punt  $90^\circ$  tegen de klok in om de oorsprong roteren moet dus wel gelijk aan het vermenigvuldigen van het complexe getal met  $\sqrt{-1} = i = e^{\frac{1}{2}\pi i}$ . Algemeen komt een rotatie van  $\phi$  radialen overeen met de vermenigvuldiging van het complexe getal met  $e^{\phi i} = \cos \phi + i \sin \phi$ .

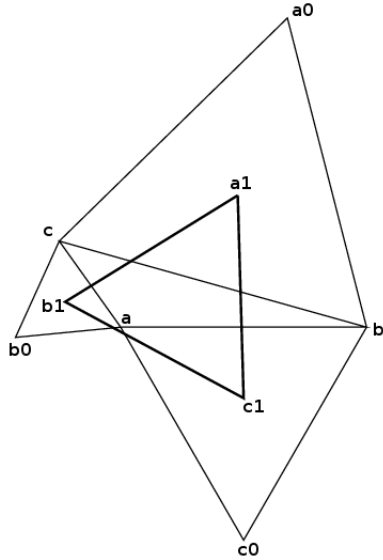


Het midden van twee punten is heel makkelijk te berekenen: het rekenkundige gemiddelde van de twee complexe getallen (de helft van hun som). Om te bewijzen dat de twee lijnstukken  $|ab|$  en  $|cd|$  of wel de vectoren  $\vec{ab}$  en  $\vec{cd}$  even lang zijn, voldoet het te bewijzen dat  $(b - a) = (d - c)e^{\phi i}$  voor een draaiingshoek  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

Een rotatie van  $\phi$  radialen van een punt  $b$  om een punt  $a$  is te verkrijgen door via een translatie  $a$  als oorsprong te nemen door  $a$  van  $b$  af te trekken, dan  $b$  te roteren om de oorsprong, en vervolgens de translatie weer ongedaan te maken, door  $a$  er weer bij op te tellen:  $b' = a + (b - a)e^{\phi i}$ .

## 2.1 De stelling van Napoleon

De stelling van Napoleon zegt dat als je een driehoek hebt, en aan elke zijde een gelijkzijdige driehoek vast maakt, de middelpunten van de gelijkzijdige driehoeken samen weer een gelijkzijdige driehoek vormen.



Deze stelling is heel makkelijk te bewijzen met complexe getallen, omdat het hier maar over één rotatie gaat, namelijk die van  $60^\circ$ . Noem deze rotatie  $\epsilon$ . Je hebt dus:

$$\begin{aligned}\epsilon &= e^{\frac{1}{3}\pi i} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \epsilon^2 &= e^{\frac{2}{3}\pi i} = -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{3} = \epsilon - 1\end{aligned}$$

Noem de nieuwe hoekpunten van de gelijkzijdige driehoeken  $a_0$ ,  $b_0$  en  $c_0$ . Nu is  $a_0$  een rotatie van  $b$  om  $c$ ,  $b_0$  is een rotatie van  $c$  om  $a$  en  $c_0$  is een rotatie van  $a$  om  $b$ :

$$\begin{aligned}a_0 &= c + (b - c)\epsilon \\ b_0 &= a + (c - a)\epsilon \\ c_0 &= b + (a - b)\epsilon\end{aligned}$$

De middelpunten  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$  van de gelijkzijdige driehoeken kun je vinden door het rekenkundige gemiddelde te nemen van de drie hoekpunten:

$$\begin{aligned}a_1 &= \frac{1}{3}(b + c + a_0) \\ b_1 &= \frac{1}{3}(c + a + b_0) \\ c_1 &= \frac{1}{3}(a + b + c_0)\end{aligned}$$

Het enige wat nodig is te bewijzen, is dat  $b_1$  een rotatie van  $60^\circ$  van  $a_1$  om  $c_1$  is, dus dat  $b_1 = c_1 + (a_1 - c_1)\epsilon$  ofwel dat  $b_1 - c_1 = (a_1 - c_1)\epsilon$ . Dan is  $a_1b_1c_1$  namelijk een gelijkbenige driehoek met een tophoek van  $60^\circ$ , een gelijkzijdige driehoek dus. Je hebt:

$$\begin{aligned}
a_1 - c_1 &= \frac{1}{3}(b + c + a_0) - \frac{1}{3}(a + b + c_0) \\
3(a_1 - c_1) &= 2c - a - b + (2b - a - c)\epsilon \\
3(a_1 - c_1)\epsilon &= (2c - a - b)\epsilon + (2b - a - c)\epsilon^2 \\
&= (2c - a - b)\epsilon + (2b - a - c)(\epsilon - 1) \\
&= a + c - 2b + (b + c - 2a)\epsilon \\
b_1 - c_1 &= \frac{1}{3}(c + a + b_0) - \frac{1}{3}(a + b + c_0) \\
3(b_1 - c_1) &= a + c - 2b + (b + c - 2a)\epsilon
\end{aligned}$$

Hiermee is bewezen dat inderdaad  $b_1 - c_1 = (a_1 - c_1)\epsilon$ , dus dat  $a_1b_1c_1$  een gelijkzijdige driehoek is. ■

Er kwam geen hulplijn of sinus te pas aan dit bewijs. Door complexe getallen te gebruiken voor de hoekpunten konden deze in elkaar worden uitgedrukt. Vervolgens was door het simpelweg herschrijven van een paar gelijkheden het gewenste resultaat te vinden.

### 3 Schrödingervergelijking

In de kwantummechanica blijkt het handig om voor golffunctievoorschriften complexe getallen te gebruiken.

#### 3.1 Klassieke golfvergelijking

Een transversale golf wordt beschreven door een functie  $y(x, t)$ . Stel dat op tijdstip  $t = 0$   $y$  gegeven wordt door  $y = f(x)$ . Ga ervanuit dat de golf een constante snelheid  $v$  heeft en niet van vorm verandert. Dan is  $x'$  op tijdstip  $t$  gelijk aan  $x$  op tijdstip 0, ofwel  $y(x', t) = y(x, 0) = f(x)$  en  $x' = x - vt$ . Daarom moet de functie  $y$  in de vorm  $y = f(x - vt)$  zijn.

Neem  $z = x - vt$ , dan krijg je met de kettingregel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -v \frac{\partial y}{\partial z} \end{aligned} \right\} \frac{\partial y}{\partial t} = -v \frac{\partial y}{\partial x}$$

Partieel differentiëren naar  $t$  geeft

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial}{\partial x} \left( -v \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

#### 3.2 Kwantummechanica

In de klassieke mechanica kun je de energie omschrijven als kinetische en potentiële energie, dus

$$E = \frac{p^2}{2m} + V.$$

In de kwantummechanica heb je de formules

$$\lambda = \frac{h}{p} \text{ en } E = hf.$$

Voor de kwantummechanische golfvergelijking heb je andere grootheden dan bij de klassieke golfvergelijking: golfgetal  $k$  en hoeksnelheid  $\omega$ :

$$\begin{aligned} k &= \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{p}{\hbar} \text{ dus } p = \hbar k \\ \omega &= 2\pi f = \frac{2\pi E}{h} = \frac{E}{\hbar} \text{ dus } E = \hbar \omega \end{aligned}$$

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V$$

Een functie is in de vorm  $y = f(kx - \omega t)$ . Volgens de laatste formule is  $\omega \propto k^2$  een vereiste, ofwel

$$\frac{\partial y}{\partial t} \propto \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Een functie als  $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  voldoet hier niet, omdat je bij de eerste afgeleide een cosinus krijgt, geen sinus:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -\omega A \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A \sin(kx - \omega t)$$

Hier is het handig, gebruik te maken van complexe getallen.

Een functie als  $y(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$  voldoet namelijk wel, want:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -i\omega Ae^{i(kx - \omega t)} = -i\omega y(x, t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 Ae^{i(kx - \omega t)} = -k^2 y(x, t)$$

Nu kun je ze in elkaar uitdrukken:

$$-i\omega y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{i\omega}{k^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{i(E/\hbar)}{(p^2/\hbar^2)} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{iE\hbar}{p^2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Met de substituties  $\omega = \frac{E}{\hbar}$  en  $p^2 = 2m(E - V)$  krijg je:

$$-\left(\frac{iE}{\hbar}\right) y = \frac{i\hbar E}{2m(E - V)} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$(E - V)y = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 y}{dx^2} + V(x)y = Ey$$

Dit is de ééndimensionale tijdsafhankelijke Schrödingervergelijking.

In dit uiteindelijke resultaat staat nergens meer een  $i$ , maar om deze vergelijking af te leiden is het gebruik van complexe getallen wel nuttig geweest.

## 4 Wisselstroom

Een sinusvormige wisselstroom heeft als spanning  $V = V_0 e^{i\omega t}$  en als stroom  $I = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$  waar  $\phi$  de hoek tussen de stroom en de spanning is. De werkelijke spanning en stroom zijn alleen het reële deel van de grootheden, maar bij het rekenen met de impedantie  $Z = \frac{V}{I}$  wordt ook het imaginaire deel gebruikt.

Bij een weerstand loopt de stroom gelijk met de spanning. Het faseverschil  $\phi$  is daarom 0. De impedantie  $Z$  is hier een reëel getal, namelijk de weerstand  $R$ .

Voor een condensator met capaciteit  $C$  geldt:  $Q = CV$ , waar  $Q$  de lading is en  $C$  de capaciteit. Stroom is gedefinieerd als lading per tijd, dus

$$I = \frac{dQ}{dt} = C \frac{dV}{dt}.$$

Omdat de spanning  $V$  gedefinieerd is als

$$V = V_0 e^{i\omega t}$$

is

$$I = i\omega C V_0 e^{i\omega t} = i\omega C V.$$

De impedantie is dus

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V}{i\omega C V} = \frac{1}{i\omega C}.$$

Omdat  $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$  is het faseverschil tussen de stroom en de spanning gelijk aan  $\frac{\pi}{2}$ . De stroom loopt  $\frac{1}{4}$  periode voor op de spanning.

Een spoel met zelfinductie  $L$  heeft als spanning

$$V = L \frac{dI}{dt} = i\omega L I_0 e^{i(\omega t + \phi)} = i\omega L I.$$

De impedantie is

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{i\omega L I}{I} = i\omega L.$$

### 4.1 Onderzoek

Ik heb geprobeerd te onderzoeken welke invloed de frequentie van de wisselspanning heeft op de spanning die op een condensator of spoel staat.

Op vrijdag 23 november heb ik metingen gedaan met een condensator van  $10 \mu F$ . Met een oscilloscoop heb ik geschat hoeveel de spanning op de condensator achterliep op de spanning op een er parallel op aangesloten weerstand van  $150 \Omega$ .

Te verwachten is, dat een hogere frequentie zorgt voor minder achterstand, omdat er bij een hoge frequentie maar heel weinig lading echt bewogen wordt.

Dit zijn de meetresultaten:

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 6 Hz   | : | 80° |
| 10 Hz  | : | 70° |
| 18 Hz  | : | 60° |
| 35 Hz  | : | 60° |
| 56 Hz  | : | 45° |
| 190 Hz | : | 15° |
| 300 Hz | : | 10° |
| 960 Hz | : | 0°  |

Op maandag 26 november heb ik met heel hoge frequenties gemeten, en de totale spanning op het circuit vergeleken met de spanning op de condensator. De spanning op de condensator liep steeds 90° achter, zoals gewoonlijk bij een condensator.

Ik heb ook de spanning op een spoel met 300 wikkelingen gemeten. Daarvan liep de spanning steeds voor op de spanning uit de stroombron. Dit komt door de inductiespanning, die veroorzaakt wordt door de stroom.

Dit zijn de meetresultaten:

|           |   |      |
|-----------|---|------|
| 1 Hz      | : | 180° |
| 10 Hz     | : | 180° |
| 100 Hz    | : | 170° |
| 1000 Hz   | : | 100° |
| 10000 Hz  | : | 90°  |
| 100000 Hz | : | 70°  |

Ik kan verder niets met deze meetresultaten. Om de zelfinductie  $L = \frac{n^2}{R_n}$  uit te rekenen moet ik de magnetische weerstand  $R_n$  weten.

## 5 Zètafunctie

De Riemann-zètafunctie is voor reële getallen  $s > 1$  gedefinieerd als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Deze functie kan ook worden gedefinieerd voor complexe getallen. Maar als  $\Re(s) \leq 1$  convergeert deze oneindige som niet, en is er dus een andere definitie nodig. Een algemene definitie, zodat  $\zeta(s)$  te berekenen is voor alle  $s \in \mathbb{C}$ .

### 5.1 De faculteitsfunctie

Voor de algemene formule voor de zètafunctie moet je de uitbreiding van de faculteitsfunctie,  $\Pi(s)$ , definiëren voor alle  $s \in \mathbb{C}$ . Voor alle niet-negatieve gehele getallen  $s$  bekijk je de integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}.$$

Differentiëren naar  $\alpha$  geeft

$$-\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

In totaal  $s$  keer differentiëren naar  $\alpha$  geeft

$$(-1)^s \int_0^{\infty} x^s e^{-\alpha x} dx = (-1)^s \frac{s!}{\alpha^{s+1}}.$$

Als je  $\alpha = 1$  invult levert dit

$$s! = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx$$

op. Nu heb je een functie die voor niet-negatieve gehele getallen  $s$  overeenkomt met de faculteitsfunctie. Maar deze integraal is convergent voor alle reële  $s > -1$  en is dus een uitbreiding van de faculteitsfunctie tot het domein  $\langle -1, \infty \rangle$ .

Voor reële  $s > -1$  definieer je dus de functie  $\Pi(s)$  als

$$\Pi(s) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx.$$

Maar je wilt een functie  $\Pi(s)$  die voor alle complexe getallen gedefinieerd is en voldoet aan de functionaalvergelijking  $\Pi(s+1) = (s+1)\Pi(s)$ . De functie

$$\Pi(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(s+1)(s+2)\dots(s+n)} (n+1)^s$$

voldoet, want als je  $s+1$  invult krijg je

$$\Pi(s+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(s+2)(s+3)\dots(s+n+1)} (n+1)^s (n+1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{s+n+1} (s+1)\Pi(s).$$

De breuk gaat naar 1 voor  $n \rightarrow \infty$  en je houdt inderdaad de functionaalvergelijking over. Als je  $\frac{1}{\Pi(s)} \frac{1}{\Pi(-s)}$  uitschrijft met deze laatste definitie, krijg je

$$\frac{1}{\Pi(s)} \frac{1}{\Pi(-s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+s)(2+s) \dots (n+s)}{n!(n+1)^s} \frac{(1-s)(2-s) \dots (n-s)}{n!(n+1)^{-s}}.$$

De factoren  $(n+1)^s$  en  $(n+1)^{-s}$  in de noemer vallen tegen elkaar weg; in de factoren in de teller herken je zogenaamde “merkwaardige producten”. De factor  $n!$  staat er twee keer, en wordt dus  $(n!)^2 = 1^2 \times 2^2 \times \dots \times n^2$ . Uitschrijven geeft het oneindige product

$$\frac{1}{\Pi(s)} \frac{1}{\Pi(-s)} = \frac{(1^2 - s^2)(2^2 - s^2)(3^2 - s^2) \dots}{1^2 \times 2^2 \times 3^2 \dots}.$$

Als je nu elke factor in de teller deelt door de bijbehorende factor in de noemer, dan herken je de productformule voor de genormaliseerde sinc-functie

$$\frac{1}{\Pi(s)\Pi(-s)} = \left(1 - \frac{s^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{2^2}\right) \left(1 - \frac{s^2}{3^2}\right) \dots = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s}.$$

## 5.2 Integraalformule voor de zètafunctie

In de integraal voor  $\Pi(s-1)$  kun je met de substitutieregels  $x$  vervangen door  $nx$ :

$$\Pi(s-1) = \int_{\frac{0}{n}}^{\frac{\infty}{n}} e^{-nx} (nx)^{s-1} n dx$$

$$\frac{\Pi(s-1)}{n^s} = \int_0^\infty e^{-nx} x^{s-1} dx$$

Als je dit voor alle gehele  $n \geq 1$  bij elkaar optelt, krijg je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Pi(s-1)}{n^s} = \int_0^\infty x^{s-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} dx.$$

De sommatie rechts kan herschreven worden via de formule

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} = \frac{1}{r-1}$$

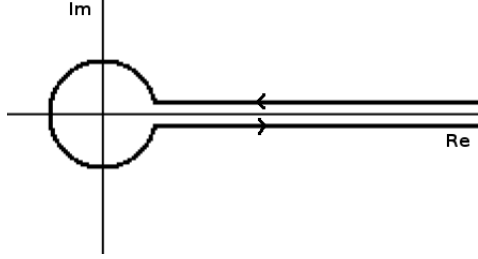
voor  $r = e^x$ . Uiteindelijk wordt het dus

$$\Pi(s-1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Deze formule geldt voor alle reële  $s > 1$ .

### 5.3 Contourintegraal

De zètafunctie kan voor alle complexe getallen gedefinieerd worden met een contourintegraal. De contour begint bij  $+\infty$ , iets boven de reële as. Dan gaat hij naar 0, gaat een rondje om de oorsprong, en gaat aan de andere kant van de reële as weer naar  $+\infty$ .



De contourintegraal

$$\oint_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

kan opgedeeld worden in drie stukken: een stuk van  $+\infty$  naar 0, de cirkel om de oorsprong met straal  $\delta \rightarrow 0$ , en het stuk van 0 terug naar  $+\infty$ :

$$\int_{+\infty}^{\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_{|x|=\delta} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

Voor  $s > 1$  heeft de functie geen pool, dus gaat de middelste term naar 0. De andere twee termen vallen niet tegen elkaar weg, omdat ze aan de andere kant van de reële as zitten. De eerste term is eigenlijk

$$\lim_{h \rightarrow 0} - \int_0^{\infty} \frac{(-(x + ih))^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = - \int_0^{\infty} \frac{(xe^{-\pi i})^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = -e^{-\pi i s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

en de derde term is

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{(-(x - ih))^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = \int_0^{\infty} \frac{(xe^{\pi i})^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = e^{\pi i s} \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Samen geven ze

$$\oint_{+\infty}^{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = (e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1}$$

Door gebruik te maken van de substituties

$$e^{\pi i s} - e^{-\pi i s} = 2i \sin(s)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{e^x - 1} = \Pi(s - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$s \Pi(s - 1) = \Pi(s)$$

$$\Pi(s) \Pi(-s) = \frac{\pi s}{\sin(\pi s)}$$

kom je uiteindelijk op de algemene formule van de zètafunctie

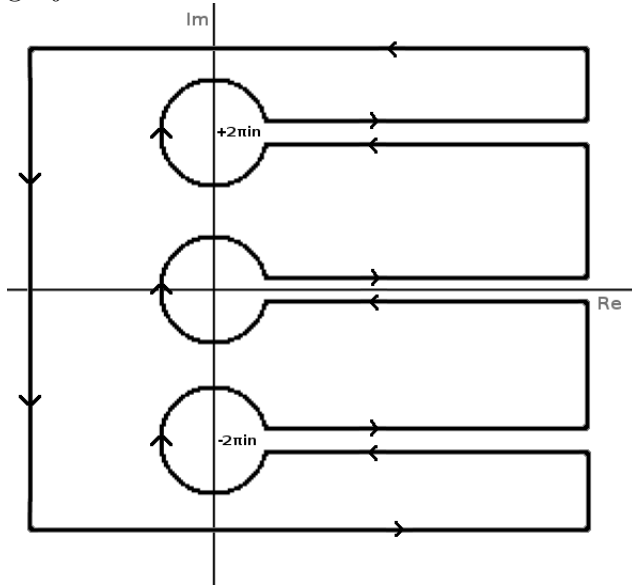
$$\zeta(s) = \frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \oint_{+\infty} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

die, als  $\Re(s) > 1$ , overeenkomt met de functie

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

## 5.4 Functionaalvergelijking

In de geïntegreerde functie van de algemene formule van de zètafunctie zijn er singulariteiten op de punten  $x = \pm 2\pi in$ . Als  $D$  de verzameling punten is die verder dan een afstand  $\epsilon$  van die punten en de reële as liggen en  $\delta D$  de contourintegraal op het plaatje (die dus om al die punten heen gaat), dan is die integraal volgens de stelling van Cauchy gelijk aan 0.



Op het plaatje heb ik maar twee cirkels om singulariteiten getekend, maar het zijn er aan beide kanten van de reële as oneindig veel.

$$\frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \oint_{\delta D} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0.$$

De contour bevat de contour van de algemene definitie van de zètafunctie maar dan de andere kant op, en nog de cirkels om de singulariteiten, ook met de klok mee. De rest valt tegen elkaar weg. Als de integralen met de klok mee worden berekend, komt er dus een min-teken voor:

$$-\zeta(s) - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \oint_{|x-2\pi in|=\epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x} = 0$$

$$\zeta(s) = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \oint_{|x-2\pi in|=\epsilon} \frac{(-x)^s}{e^x - 1} \frac{dx}{x}$$

De integraal om zo'n cirkeltje is te berekenen door  $x$  te vervangen door  $2\pi in + y$  met  $|y| = \epsilon$ .

$$\frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \oint_{|y|=\epsilon} \frac{(-2\pi in - y)^s}{e^{2\pi in + y} - 1} \frac{dy}{2\pi in + y}$$

Dit is te herschrijven, omdat  $e^{2\pi in + y} = e^y$  en omdat  $-2\pi in - y$  op een factor  $-1$  na te vinden is als noemer van de laatste breuk.

$$\frac{\Pi(-s)}{2\pi i} \oint_{|y|=\epsilon} -(-2\pi in - y)^{s-1} \frac{dy}{e^y - 1}$$

De term  $-y$  is insignificant in  $(-2\pi in - y)^{s-1}$ , dus is deze factor onafhankelijk van  $y$  en mag hij buiten de integraal gehaald worden.

$$-\frac{\Pi(-s)}{2\pi i} (-2\pi in)^{s-1} \oint_{|y|=\epsilon} \frac{dy}{e^y - 1}$$

De contourintegraal is nu te berekenen, en komt uit op  $2\pi i$ . Voor elk cirkeltje is de contourintegraal uiteindelijk

$$-\Pi(-s)(-2\pi in)^{s-1}.$$

Voor  $\zeta(s)$  geeft dit dus

$$\zeta(s) = - \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} -\Pi(-s)(-2\pi in)^{s-1}$$

De factor  $\Pi(-s)$  kan voor de sommatie gehaald worden, en je kunt elke  $n$  en  $-n$  samen nemen.

$$\zeta(s) = \Pi(-s) \sum_{n=1}^{\infty} ((-2\pi in)^{s-1} + (2\pi in)^{s-1})$$

De factor  $(2\pi)^{s-1}$  is onafhankelijk van  $n$ . Het enige wat afhankelijk van  $n$  is, en dus binnen de sommatie moet blijven, zijn de termen  $n^{s-1} = \frac{1}{n^{1-s}}$ .

$$\zeta(s) = \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} (i^{s-1} + (-i)^{s-1}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1-s}}$$

Nu heb je nog  $(i^{s-1} + (-i)^{s-1}) = \frac{1}{i}(e^{s\frac{\pi i}{2}} - e^{-s\frac{\pi i}{2}}) = 2 \sin(\frac{\pi s}{2})$ , dus

$$\zeta(s) = \Pi(-s)(2\pi)^{s-1} 2 \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(1-s).$$

Dit is de functionaalvergelijking van de zëtafunctie.

## 5.5 Toepassing

De zètafunctie is belangrijk in de getaltheorie. Er is iets mee te zeggen over de verdeling van de priemgetallen.

De functie  $\pi(x)$  is gedefinieerd als het aantal priemgetallen kleiner of gelijk aan  $x$ . Er is geen precieze formule voor, maar het is bekend dat

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Dit is de priemgetalstelling, die onder andere te bewijzen is met de zètafunctie.

Er zijn betere benaderingen voor  $\pi(x)$  gevonden, zoals de logaritmische integraal

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},$$

maar ook deze is niet precies. Er wordt wel vermoed dat het verschil tussen  $\pi(x)$  en  $\text{li}(x)$  nooit  $\frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$  overschrijdt, dus dat

$$\left| \pi(x) - \int_0^x \frac{dt}{\ln t} \right| < \frac{1}{8\pi}\sqrt{x}\ln x$$

als  $x \geq 2657$ . Dit vermoeden is verbonden met de Riemann-hypothese, die zegt: “alle niet-triviale nulpunten van de zètafunctie hebben als reële deel  $\frac{1}{2}$ .” Als de Riemann-hypothese waar is, voldoet  $\pi(x)$  aan de bovenstaande ongelijkheid.

Het gaat er dus om voor welke waarden van  $s$  geldt:  $\zeta(s) = 0$ .

De functionaalvergelijking van de zètafunctie bevat een factor  $\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)$ , dus je zou denken dat  $\zeta(s) = 0$  voor alle even getallen  $s$ . Maar omdat  $\Pi(-s)$  voor positieve gehele  $s$  een pool heeft vallen deze af. En  $\zeta(1-s)$  heeft een pool voor  $s = 0$ , dus ook dat is niet noodzakelijk een nulpunt. Maar je weet wel dat de zètafunctie nulpunten heeft bij de even negatieve getallen. Dit zijn de triviale nulpunten, omdat ze makkelijk te berekenen zijn.

De niet-triviale nulpunten voldoen in ieder geval aan  $0 < \Re(s) < 1$ , en er wordt dus vermoed dat voor al die nulpunten geldt  $\Re(s) = \frac{1}{2}$ . Er zijn al biljoenen nulpunten gevonden die daaraan voldoen, maar het is nog niet bekend of er ook nulpunten zijn die niet voldoen.

Er worden op den duur wel meer dingen ontdekt over de zètafunctie en de verdeling van de priemgetallen.

Zo komt men met complexe getallen meer te weten over gebieden in de wiskunde die verder niets te maken hebben met complexe getallen.

## 6 Conclusie

Ik heb in dit profielwerkstuk verschillende toepassingen van complexe getallen besproken. Ik vat ze nog eens samen.

In de meetkunde kun je hoekpunten voorstellen als complexe getallen. Zo kun je hoekpunten in elkaar uitdrukken en er op die manier ook mee rekenen. Hiermee voorkom je onnodige sinussen en hulplijnen.

Voor het afleiden van de Schrödingervergelijking is het nuttig om complexe getallen te gebruiken. De golffunctie moet niet van vorm veranderen als je deze een eerste keer differentieert. Bij een sinus gebeurt dit wel, bij een complexe  $e$ -macht niet. Als de uiteindelijke vergelijking er staat, zitten er geen  $i$ 'tjes meer in. Die waren alleen nodig bij het afleiden. Bij wisselstromen kun je met complexe getallen op een mooie manier stroom, spanning en impedantie beschrijven.

De Riemann  $\zeta$ -functie is een functie die voor complexe getallen te definiëren is. Deze functie is te gebruiken om inzicht te krijgen in de verdeling van priemgetallen, die zelf niks met complexe getallen te maken hebben. Ik heb de algemene definitie en de functionaalvergelijking afgeleid.

Deze vier toepassingen van complexe getallen staan los van elkaar, maar het is duidelijk dat  $i$  een handige uitvinding is om mee te rekenen.

## 7 Bronnen

Voor dit profielwerkstuk heb ik de volgende materiële bronnen gebruikt:

- Problem-solving strategies; door Arthur Engel
- Quantum mechanics, a first course; door B. Cameron Reed
- Wikipedia: Schrödinger equation, Condensator, Spoel, Riemann hypothesis
- Riemann's zeta function; door H.M. Edwards
- <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/gammaFunction.ps>
- Wisselstroomnetwerken - complexe rekenwijze; door T.W. Hijmans

## 8 Bijlage:gebruikte stellingen

### 8.1 Formule van Euler

De veelgebruikte formule van Euler. Als

$$f(x) = \frac{\cos(x) + i \sin(x)}{e^{ix}}$$

dan heb je met de quotiëntregel:

$$f'(x) = \frac{e^{ix}(-\sin(x) + i \cos(x)) - ie^{ix}(\cos(x) + i \sin(x))}{e^{2ix}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{ix}(-\sin(x) + i \cos(x)) - e^{ix}(i \cos(x) + i^2 \sin(x))}{e^{2ix}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{ix}(-\sin(x) + i \cos(x)) - e^{ix}(i \cos(x) - \sin(x))}{e^{2ix}} = 0.$$

Aangezien de afgeleide van  $f(x)$  altijd 0 is, is  $f(x)$  een constante functie, en dus is

$$f(x) = f(0) = \frac{\cos(0) + i \sin(0)}{e^{0i}} = 1$$

Dus

$$\frac{\cos(x) + i \sin(x)}{e^{ix}} = 1$$

ofwel

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

### 8.2 Parametrisch differentiëren

Dit heb ik gebruikt voor de integraalformule van de  $\Pi$ -functie.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^b f(x, y+h) dx - \int_a^b f(x, y) dx}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_a^b f(x, y+h) - f(x, y) dx \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \int_a^b \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} dx \\ &= \int_a^b \frac{d}{dy} f(x, y) dx \end{aligned}$$

### 8.3 Substitutieregel

De omgekeerde kettingregel (voor integralen)

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = [F(x) + C]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a))$$

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = [F(g(x)) + C]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

dus

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx$$

### 8.4 Stelling van Cauchy

Als  $f(z)$  een holomorfe functie is die gedefinieerd is in een gebied  $U$  waar geen gaten in zitten en  $\gamma$  is een kromme binnen  $U$ , die op hetzelfde punt eindigt als hij begint, dan is

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 0.$$

Dit betekent ook, dat twee lijnintegralen waarvan het verschil zo'n kromme is dezelfde waarde hebben.